Correction du devoir de contrôle n°2

1-a) $a = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2-\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{2}-2)(2+\sqrt{2})}{2^2-\sqrt{2}^2} = \frac{6\sqrt{2}+6-4-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2+4\sqrt{2}}{2}$

$= 1+2\sqrt{2}$

$b = |7-\sqrt{50}| + 17 + \sqrt{2} = |\sqrt{49}-\sqrt{50}| + 17+\sqrt{2} = \sqrt{50}-\sqrt{49}+17+\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2} - 7 + 17 + \sqrt{2} = 10 + 6\sqrt{2}$

b) $a^2 = (1+2\sqrt{2})^2 = 1+4\sqrt{2}+8 = 9+4\sqrt{2}$

$= 10 - 1 + 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 10+6\sqrt{2} - (1+2\sqrt{2}) = b-a$

c) $(a-b)^5 + a^{10} = (-a^2)^5 + a^{10} = -a^{10}+a^{10} = 0$

2) $I = \{x\in\mathbb{R} \text{ tq } -a \leq bx - a < a^2\}$

$x\in I \iff -a \leq bx - a < a$

$\iff -a \leq bx-a < b-a$

$\iff 0 \leq bx < b \ (b>0)$

$\iff 0\leq x<1$

$\iff x\in[0,1[$

$\iff I=[0,1[$

3-a) $x\in[0,1[$

$\Rightarrow 0\leq x<1$

$\Rightarrow 0\leq 2x<2$

$\Rightarrow -2<-2x\leq 0$

$\Rightarrow 1<3-2x\leq 3$ (encadrement d'amplitude de 2 car $3-1=2$)

b) $x\in[0,1[\Rightarrow 1<3-2x \Rightarrow 3-2x\neq 0$

c) $2+\frac{1}{3-2x} = \frac{6-4x+1}{3-2x} = \frac{-4x+7}{3-2x} = \frac{4x-7}{2x-3}$

$0\leq x<1 \Rightarrow 1<3-2x\leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3-2x} < 1 \Rightarrow \frac{7}{3} \leq 2+\frac{1}{3-2x} < 3$

$\frac{7}{3}\leq E<3$

4) $F = \sqrt{9+\sqrt{32}} + \sqrt{b+a+1}$ $\qquad b-a=a^2$

$=\sqrt{9+4\sqrt{2}}+\sqrt{a^2+a+a+1}$

$=\sqrt{a^2}+\sqrt{(a+1)^2}$

$=|a|+|a+1| = a+a+1 = 2a+1$

$=2(1+2\sqrt{2})+1 = 3+4\sqrt{2}$

1-a) AMC triangle inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$; [AC] diamètre de $\mathscr{C}$ $\Big\}$ ACM triangle rectangle en M

b) ABE triangle inscrit dans le cercle $\mathscr{C}'$; [AB] diamètre de $\mathscr{C}$ $\Big\}$ ABE triangle rectangle en E

d'où $(BE)\perp(AE)$; $(CM)\perp(AM)$; A, M et E alignées $\Big\}$ $(BE)//(CM)$

c) Dans le triangle ABE

$C\in(AB)$; $M\in(AE)$; $(CM)//(BE)$ $\Big\}$ $\xrightarrow{\text{Thales}} \dfrac{CM}{BE}=\dfrac{AC}{AB}$

$\Longrightarrow \dfrac{CM}{2}=\dfrac{3}{4} \Longrightarrow CM=1,5$

2-a) ABE triangle rectangle en E $\xrightarrow{\text{Pythagore}}$

$AE^2=AB^2-BE^2=4^2-2^2=12 \Longrightarrow AE=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

dans le triangle ABE

$C\in(AB)$; $M\in(AE)$; $(CM)//(BE)$ $\Big\}$ $\xrightarrow{\text{Thales}} \dfrac{AM}{AE}=\dfrac{AC}{AB} \Longrightarrow \dfrac{AM}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{AO}{AO'}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{2}}=\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{AM}{AE}=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3}{4}$ $\Big\}$ $\dfrac{AO}{AO'}=\dfrac{AM}{AE}$

c) Dans le triangle AO'E

$O\in[AO']\backslash\{A\}$; $M\in[AE]\backslash\{A\}$; $\dfrac{AO}{AO'}=\dfrac{AM}{AE}$ $\Big\}$ $\xrightarrow[\text{Thales}]{\text{réciproque de}}$ $(OM)//(O'E)$

3) [AC] diamètre de $\mathscr{C}$; $N\in\mathscr{C}/\{A,C\}$ $\Big\}$ ANC triangle rectangle en M

$\left.\begin{array}{l}[AB] \text{ diamètre de } \mathscr{C}' \\ F \in \mathscr{C}' \setminus \{A, B\}\end{array}\right\}$ ABF triangle rectangle en F $\Longrightarrow (BF) \perp (AF)$

et comme A, N et F alignés

$\Longrightarrow (CN) \parallel (BF)$

Dans le triangle ABF

$\left.\begin{array}{l}C \in (AB) \\ N \in (AF) \\ (CN) \parallel (BF)\end{array}\right\} \dfrac{AN}{AF} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{4}$

Dans le triangle AEF

$\left.\begin{array}{l}N \in [AF] \setminus \{A\} \\ H \in [AE] \setminus \{E\} \\ \dfrac{AN}{AF} = \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{3}{4}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Thalès}]{\text{réciproque de}} (HN) \parallel (EF)$